Lycée M^{ed} Reda Slaoui
Centre Des Classes Préparatoires
Agadir

Année Scolaire : 04/05
BCPST 1

Devoir libre n°4

à rendre le 21/02/05

Exercice 1

Nous considérons la fonction F telle que

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(t)}$$

1. Vérifier que le domaine de définition de F est $]0, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$.
2. Calculer la dérivée de F et étudier son signe.
3. Démontrer les inégalités suivantes :
   a) $\frac{x}{\ln(2x)} < F(x) < \frac{x}{\ln(x)}$ (en appliquant à G le théorème des accroissements finis, où G est une primitive de $t :\longrightarrow \frac{1}{\ln(t)}$).
   b) En intégrant par parties $F(x) = \int_x^{2x} \frac{tdt}{t\ln(t)}$ on a :
$$\text{si } \ x > 1, \quad x \ln\left|\frac{\ln(2x)}{\ln(x)}\right| < F(x) < 2x \ln\left|\frac{\ln(2x)}{\ln(x)}\right|$$
$$\text{si } \ x < \frac{1}{2}, \quad 2x \ln\left|\frac{\ln(2x)}{\ln(x)}\right| < F(x) < x \ln\left|\frac{\ln(2x)}{\ln(x)}\right|$$
4. Appliquer les résultats précédents pour achever l'étude de F est construire son graphe.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous notons

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$$

1. Calculer I_0 et I_1 (pon pourra pour I_0, effectuer le changement de variable $t = x + \sqrt{1+x^2}$).

2. Étude des limites de I_n et J_n pour n tendant vers $+\infty$

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de (I_n) lorsque n tend vers l'infini.

   b) Montrer que J_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

3. a) Calculer la dérivée de $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

   b) Établir à l'aide d'une intégration par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{n+1} J_n$. Quelle est la limite de (nI_n) quand n tend vers l'infini.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = c + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)),$$

Montrer que :

$$c = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)dt, \;\; a_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)\cos(k\omega t)dt, \;\; b_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)\sin(k\omega t)dt$$

••••••••••